

**Examen de fin du premier semestre de Mécanique des Solides Indéformables**

Sections : MP 2 &amp; PC 2 &amp; T 2

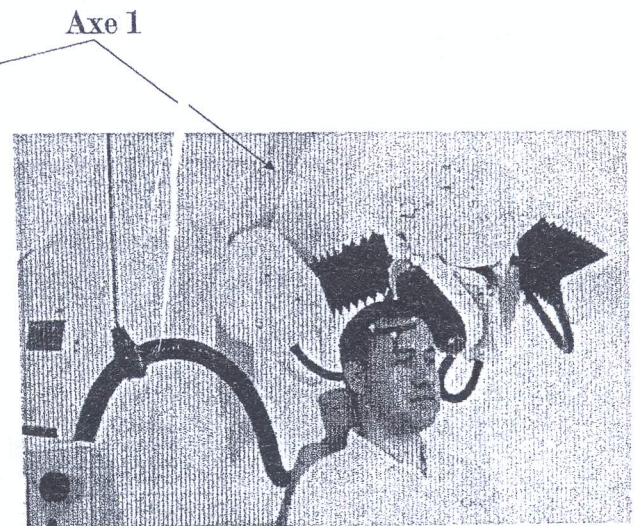
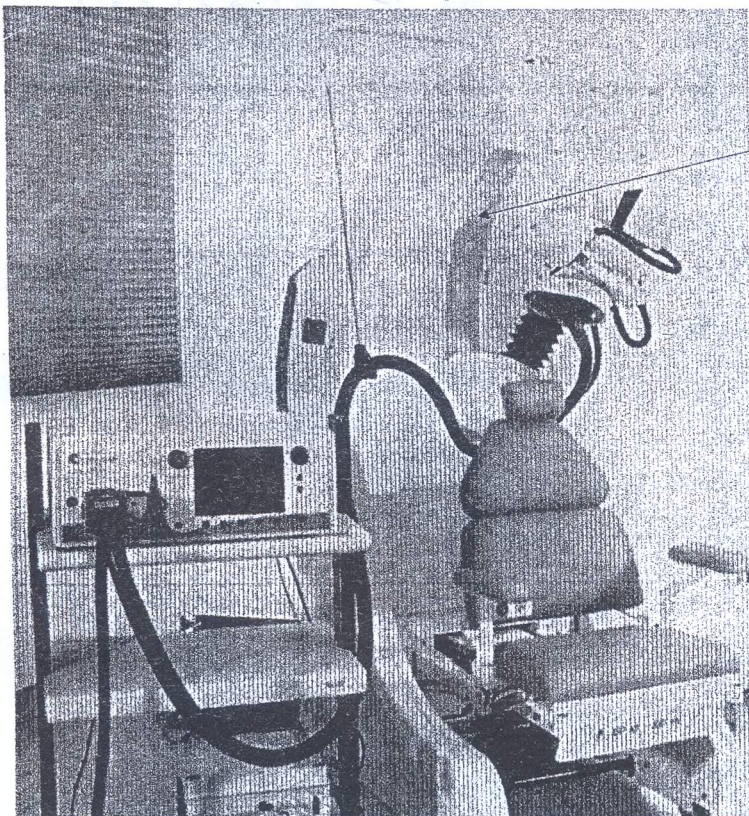
Date : 16 Décembre 2025

- *Aucun document n'est autorisé*
- *Le document-énoncé comporte 3 pages*
- *Le document-réponse comporte 8 pages*

**Étude de l'axe 1 du robot d'assistance à la Stimulation Magnétique Transcrânienne (SMT)**

La Stimulation Magnétique Transcrânienne (SMT) est une technique non-invasive qui consiste à appliquer sur le crâne une bobine délivrant des impulsions magnétiques brèves, de forte intensité et totalement indolores pour modifier l'activité électrique du cortex.

Afin de soulager le praticien, de rendre possible le traitement à grande échelle de patients avec la SMT et d'affiner l'évaluation de ses effets, un système robotique pour la SMT est développé (Figure 1). Ce système possède un bras articulé à 7 degrés de liberté ainsi qu'un siège également mobile selon 2 axes. Au bout du bras se trouve fixée la bobine de stimulation SMT.





Le sujet proposé vise à étudier l'axe 1 du système robotisé. Le schéma cinématique du dispositif de transformation de mouvement de cet axe est représenté par la Figure 2. Il est constitué des éléments suivants :

- Un guidage circulaire fixé au bâti (0) auquel est lié le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  supposé galiléen.
- Une vis (1), à laquelle est lié le repère  $\mathcal{R}_1(A, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en liaison pivot parfaite d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti (0) tel que  $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1(t) \vec{x}$ .
- Un coulisseau (2), auquel est lié le repère  $\mathcal{R}_2(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , en liaison glissière parfaite d'axe  $(D, \vec{x})$  avec le bâti (0) d'une part et en liaison hélicoïdale, à droite de pas  $p$ , d'axe  $(B, \vec{x})$  avec la vis (1) d'autre part.
- Une bielle (3) en liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{z})$  avec le coulisseau (2) d'une part et en liaison pivot parfaite d'axe  $(C, \vec{z})$  avec l'élément piloté (4) d'autre part. Le repère  $\mathcal{R}_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$  est lié à la bielle (3) tel que  $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_3) = (\vec{y}, \vec{y}_3)$ .
- Un élément piloté (4) en contact avec le guidage circulaire (0). Cette liaison est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \vec{z})$  non représentée dans le schéma cinématique (Figure 2). Le repère  $\mathcal{R}_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$  est lié à l'élément (4) tel que  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_4) = (\vec{y}, \vec{y}_4)$ .

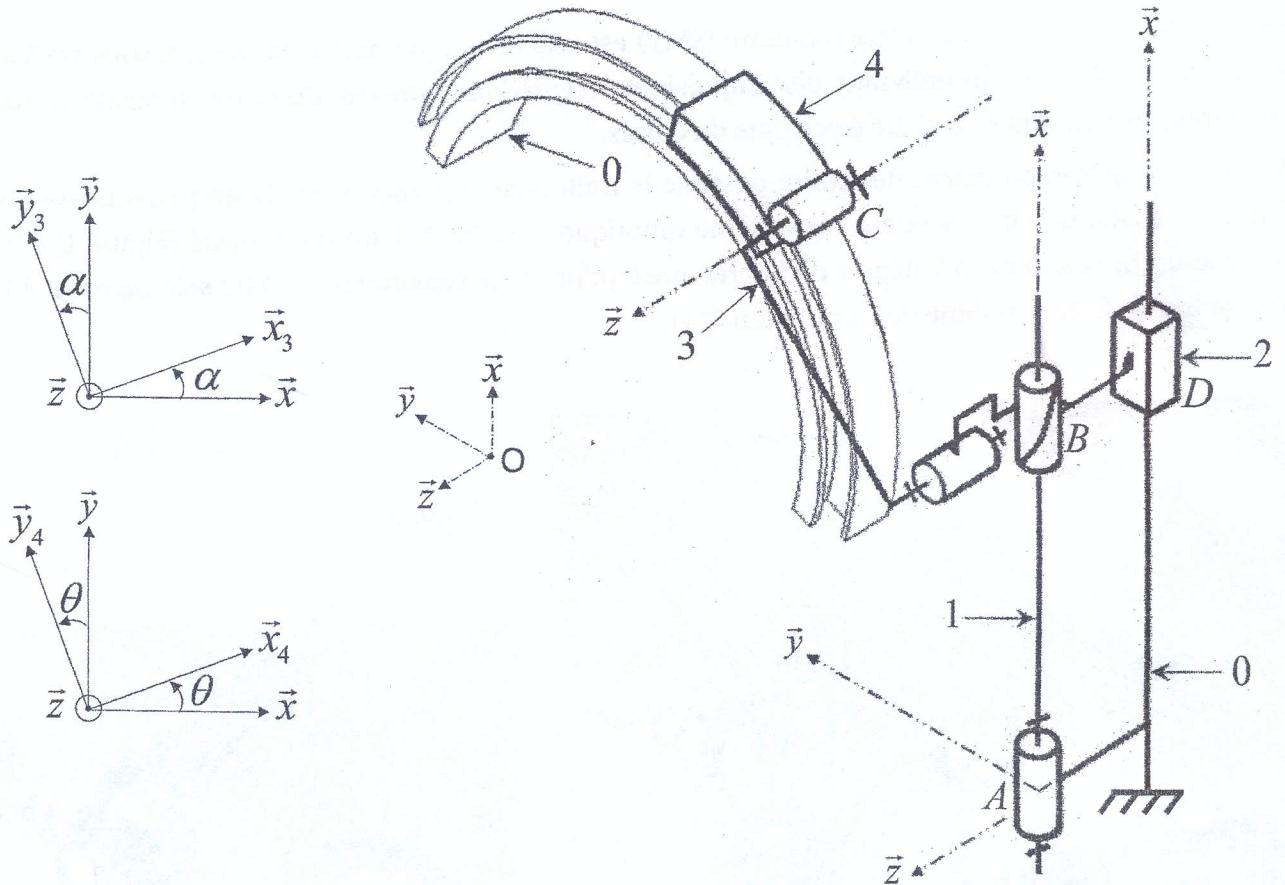


FIGURE 2 – Schéma cinématique spatial du système de transformation de mouvement de l'axe 1

#### Données et hypothèses :

- On donne :

$$\vec{OA} = -e \vec{y} ; \quad \vec{AB} = \lambda \vec{x} ; \quad \vec{BC} = L \vec{x}_3 ; \quad \vec{BD} = -d \vec{z} ; \quad \vec{OC} = (R + a) \vec{x}_4 - b \vec{y}_4$$

- Le vecteur instantané de rotation de la vis (1) par rapport à (0) est :  $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1(t) \vec{x}$ .
- La vitesse de rotation du moteur est noté  $\omega_m(t)$ .
- L'action du moteur sur la vis (1) est modélisée par le couple  $\vec{C}_m = C_m \vec{x}$ .
- L'action du système de rappel sur le coulisseau (2) est modélisée par le torseur glisseur :

$$\{\tau_{(SR \rightarrow 2)}\}_B = \begin{Bmatrix} F_r \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- L'accélération de la pesanteur est définie par :  $\vec{g} = -g \vec{x}$
- Il convient donc de retenir la notation représentant le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison entre un solide ( $i$ ) et un solide ( $j$ ) au point Q "centre géométrique de la liaison", exprimé dans la base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\{\tau_{(i \rightarrow j)}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_Q^{\mathcal{B}}$$

- Les caractéristiques d'inertie des différents solides sont comme suit :

| Solides            | Masses | Centres d'inertie                    | Moments d'inertie                                             |
|--------------------|--------|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Vis (1)            | $m_1$  | $G_1 \in (A, \vec{x})$               | $J_1$ : moment d'inertie par rapport à l'axe $(A, \vec{x})$   |
| Coulisseau (2)     | $m_2$  | $G_2$                                | —                                                             |
| Bielle (3)         | $m_3$  | $\vec{BG}_3 = \frac{L}{2} \vec{x}_3$ | $J_3$ : moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_3, \vec{z})$ |
| Élément piloté (4) | $m_4$  | $\vec{OG}_4 = R \vec{x}_4$           | $J_4$ : moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$   |

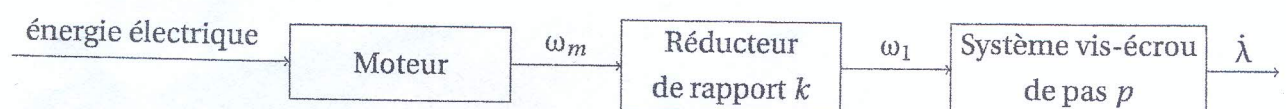
TABLEAU 1 – Caractéristiques d'inertie

- Les données numériques sont regroupées dans le tableau suivant :

| R      | L      | a     | b     | e      | d     | p    | k               |
|--------|--------|-------|-------|--------|-------|------|-----------------|
| 500 mm | 560 mm | 35 mm | 96 mm | 619 mm | 16 mm | 5 mm | $\frac{1}{4,3}$ |

TABLEAU 2 – Données numériques

- Le diagramme décrivant la chaîne d'énergie du système est comme suit :







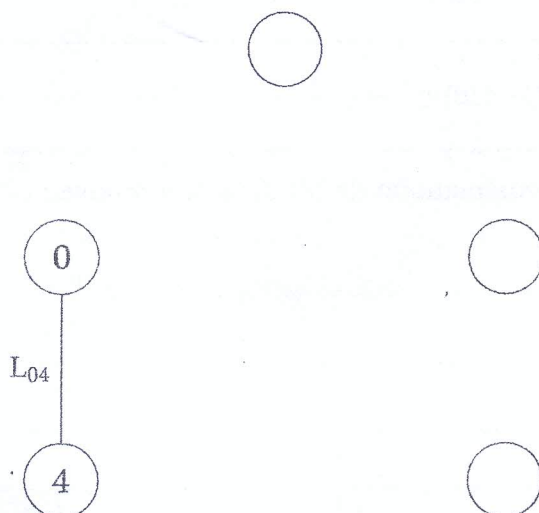
1. Chacune des feuilles de votre copie doit comporter une étiquette code à barres placée à l'endroit indiqué «coller ici votre code à barres»
2. Une copie d'examen comporte une seule «feuille principale» et des «feuilles suites» Sur chacune de vos feuilles, le code à barres est obligatoire
3. Cette feuille d'examen est strictement personnelle Elle ne doit comporter aucun signe distinctif Elle doit être écrite en noir et/ou bleu
4. Le non respect de l'une de ces exigences peut faire attribuer la note ZERO à l'épreuve

Coller ici votre  
code à barre

[illegible]

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 00 | 25 | 50 | 75 |
|    |    |    |    |

**A.1) Compléter le graphe de liaisons ci-dessous :**



$L_{04}$  : pivot d'axe  $(O, \vec{z})$

[illegible]

A.2) Écrire, en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , les équations scalaires traduisant la fermeture géométrique de la chaîne 0-2-3-4-0.

*(The page contains faint, illegible markings or bleed-through from the reverse side.)*



|   |       |
|---|-------|
| { | ..... |
|   | ..... |

- A.3) a) Déterminer le vecteur vitesse du point C appartenant à (4) dans son mouvement par rapport à (0).

|                              |
|------------------------------|
| $\vec{V}(C \in 4/0) =$ ..... |
|------------------------------|

- b) Déterminer le torseur cinématique de (3) dans son mouvement par rapport à (2) au point B, puis au point C.

|                                                                                  |   |                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\{V_{(3/2)}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} ..... \\ ..... \end{array} \right\}$ | ; | $\{V_{(3/2)}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} ..... \\ ..... \end{array} \right\}$ |
|----------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------------------------|

- c) Déterminer, par cinématique et en fonction de  $\dot{\lambda}$ , le vecteur vitesse du point C appartenant à (2) dans son mouvement par rapport à (0).

- d) Écrire, en projection dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , les équations scalaires traduisant la fermeture cinématique au point C de la chaîne 0-2-3-4-0.

---



---



---

{

---



---

- A.4) Déterminer, au point B, le torseur cinématique de (2) dans son mouvement par rapport à (1).

---



---

$$\{V_{(2/1)}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

Exprimer  $\dot{\lambda}$  en fonction de  $\omega_1$  et du pas  $p$ .

---

$\dot{\lambda} = \dots\dots\dots$

- A.5) Pour la vitesse nominale du moteur  $N_m = 6930$  tr/min et en utilisant les données numériques du Tableau 2 et le Diagramme 1 du document énoncé, déterminer la valeur numérique de  $\dot{\lambda}$  en mm/s.

---



---

$\dot{\lambda} = \dots\dots\dots \text{ mm/s}$

- A.6) Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du centre d'inertie  $G_3$  de la bielle (3) dans son mouvement par rapport à (0).

---



---



$$\vec{V}(G_3 \in 3/0) = \dots\dots\dots$$

$$\vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = \dots\dots\dots$$

## B. Étude cinétique

La configuration la plus défavorable est obtenue lorsque la bielle (3) est verticale, c'est-à-dire lorsque  $\theta = -90^\circ$ . Dans ce cas, il est possible d'approximer  $(R + a) \simeq e$  et  $\alpha \simeq 0^\circ$ . On aura ainsi :

$$\vec{x}_3 = \vec{x} \quad ; \quad \vec{y}_3 = \vec{y} \quad ; \quad \vec{x}_4 = \vec{y} \quad ; \quad \vec{y}_4 = -\vec{x}$$

$$\vec{OA} = -e \vec{y} \quad ; \quad \vec{AB} = \lambda(t) \vec{x} \quad ; \quad \vec{BC} = L \vec{x} \quad ; \quad \vec{OC} = e \vec{y} + b \vec{x} \quad ; \quad \vec{BG}_3 = \frac{L}{2} \vec{x} \quad ; \quad \vec{OG}_4 = R \vec{y}$$

Dans la suite, on cherche à étudier le comportement cinétique et dynamique du système pendant cette configuration.

**B.1)** Déterminer la projection sur  $\vec{x}$  du moment dynamique au point A de la vis (1) dans son mouvement par rapport à (0).

$$\vec{\delta}_A(1/0) \cdot \vec{x} = \dots\dots\dots$$

**B.2)** Déterminer la projection sur  $\vec{x}$  de la résultante dynamique du coulisseau (2) dans son mouvement par rapport à (0).

$$\vec{\mathcal{A}}(2/0) \cdot \vec{x} = \dots\dots\dots$$

**B.3)** Déterminer, dans la configuration étudiée, la résultante dynamique de la bielle (3) dans son mouvement par rapport à (0).



Coller ici votre  
code à barre

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings visible.

$$\vec{\delta}_C(3/0) \cdot \vec{z} = \dots\dots\dots$$





B.5) Déterminer la projection sur  $\vec{z}$  du moment dynamique au point O de l'ensemble  $S = \{3,4\}$  dans son mouvement par rapport à (0).

$$\vec{\delta}_O(S/0) \cdot \vec{z} =$$

### C. Étude dynamique

L'objectif de cette partie est de dimensionner le moteur, c'est-à-dire l'actionneur de l'axe 1, dans la configuration la plus défavorable, lorsque la bielle est verticale ( $\theta = -90^\circ$  et  $\alpha \approx 0^\circ$ ). Dans ce cas, on rappelle que :

$$\vec{OA} = -e\vec{y} \quad ; \quad \vec{AB} = \lambda(t)\vec{x} \quad ; \quad \vec{BC} = L\vec{x} \quad ; \quad \vec{OC} = e\vec{y} + b\vec{x} \quad ; \quad \vec{BG}_3 = \frac{L}{2}\vec{x} \quad ; \quad \vec{OG}_4 = R\vec{y}$$

En s'appuyant sur les résultats de la cinématique et les approximations numériques adoptées, les relations cinématiques suivantes sont retenues :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= A_1 \omega_m & \dot{\omega}_1 &= A_1 \dot{\omega}_m & \dot{\lambda} &= A_2 \omega_m & \ddot{\lambda} &= A_2 \dot{\omega}_m \\ \dot{\alpha} &= A_3 \omega_m & \ddot{\alpha} &\approx A_3 \dot{\omega}_m & \dot{\theta} &= A_4 \omega_m & \ddot{\theta} &\approx A_4 \dot{\omega}_m \end{aligned}$$

Dans ce cas, les grandeurs cinétiques déterminées dans la partie B s'écrivent sous les formes simplifiées suivantes :

$$\vec{\delta}_A(1/0) \cdot \vec{x} = J_{\text{eq}_1} \dot{\omega}_m \quad ; \quad \vec{\delta}_2(2/0) \cdot \vec{x} = J_{\text{eq}_2} \dot{\omega}_m \quad ; \quad \vec{\delta}_C(3/0) \cdot \vec{x} = J_{\text{eq}_3} \dot{\omega}_m \quad ; \quad \vec{\delta}_O(S/0) \cdot \vec{x} = J_{\text{eq}_S} \dot{\omega}_m$$

C.1) Écrire en leurs points d'application et dans la base  $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , les torseurs des actions mécaniques suivants :

$$\begin{aligned} \{\tau(0 \rightarrow 1)\} &= \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}} & \{\tau(0 \rightarrow 2)\} &= \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}_D^{\mathcal{B}} & \{\tau(0 \rightarrow 4)\} &= \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}} \\ \{\tau(1 \rightarrow 2)\} &= \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}} & \{\tau(2 \rightarrow 3)\} &= \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}} & \{\tau(3 \rightarrow 4)\} &= \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}_C^{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\tau(\vec{g} \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right\}_{G_1}^{\mathcal{B}} & \{\tau(\vec{g} \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right\}_{G_2}^{\mathcal{B}} & \{\tau(\vec{g} \rightarrow 3)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right\}_{G_3}^{\mathcal{B}} \\ \{\tau(\vec{g} \rightarrow 4)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right\}_{G_4}^{\mathcal{B}} & \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right\}_{\mathcal{B}} & \{\tau(\text{SR} \rightarrow 2)\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right\}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

C.2) Appliquer, au point A et en projection sur  $\vec{x}$ , le Théorème du Moment Dynamique à la vis (1) dans son mouvement par rapport à (0).

---

---

---

---

---

---

---

---

$$J_{\text{eq}_1} \dot{\omega}_m = \dots$$

C.3) Appliquer, en projection sur  $\vec{x}$ , le Théorème de la Résultante Dynamique au coulisseau (2) dans son mouvement par rapport à (0).

---

---

---

$$J_{\text{eq}_2} \dot{\omega}_m = \dots$$

C.4) Appliquer, au point C et en projection sur  $\vec{z}$ , le Théorème du Moment Dynamique à la bielle (3) dans son mouvement par rapport à (0).

---

---

---

---



$$J_{\text{eq}_3} \dot{\omega}_m = \dots$$

C.5) Appliquer, au point O et en projection sur  $\vec{z}$ , le Théorème du Moment Dynamique à l'ensemble  $S = \{3, 4\}$  dans son mouvement par rapport à (0).

$$J_{\text{eq}_S} \dot{\omega}_m = \dots$$

C.6) Déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$ .

$$C_m = \dots$$